Určitý integrál

pouhá motivace

Augustin Louis Cauchy

- * 21. 8. 1789 v Paříži, Francie
- # 23. 5. 1857 v Sceaux(blízko Paříže)
- V roce 1823 formuloval definici určitého integrálu a zjistil, pro které funkce je jeho definice platná.

Plošný obsah

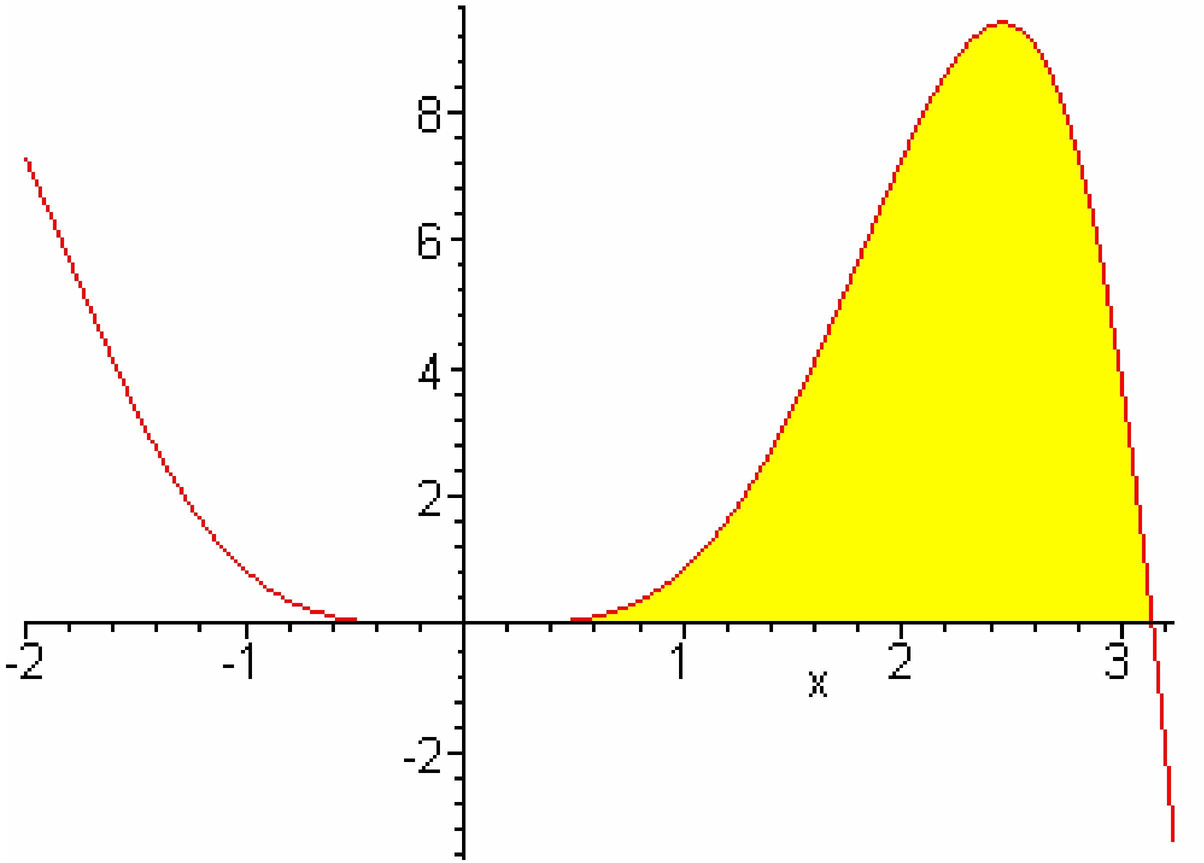
- Mějme funkci

$$f : y = x^3 \sin x$$

- Počítejme plošný obsah množiny ohraničené grafem funkce, osou x a přímkami

$$x = 0, x = \pi$$

Zajímá nás tedy plošný obsah zvýrazněného útvaru



Dělení intervalu

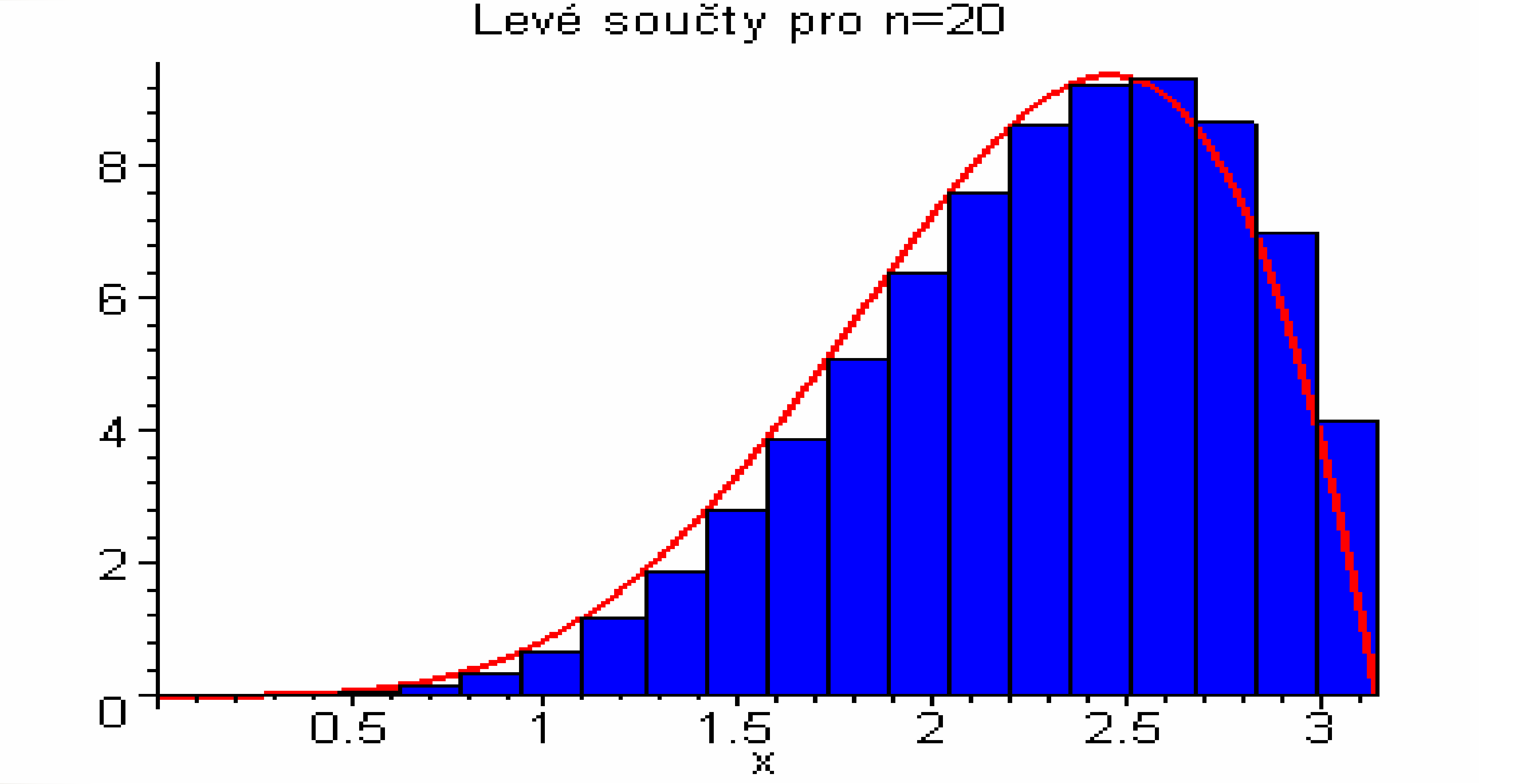
- Zvolme n=20, to je počet intervalů na které rozdělíme interval

$$I = \langle 0, \pi \rangle$$

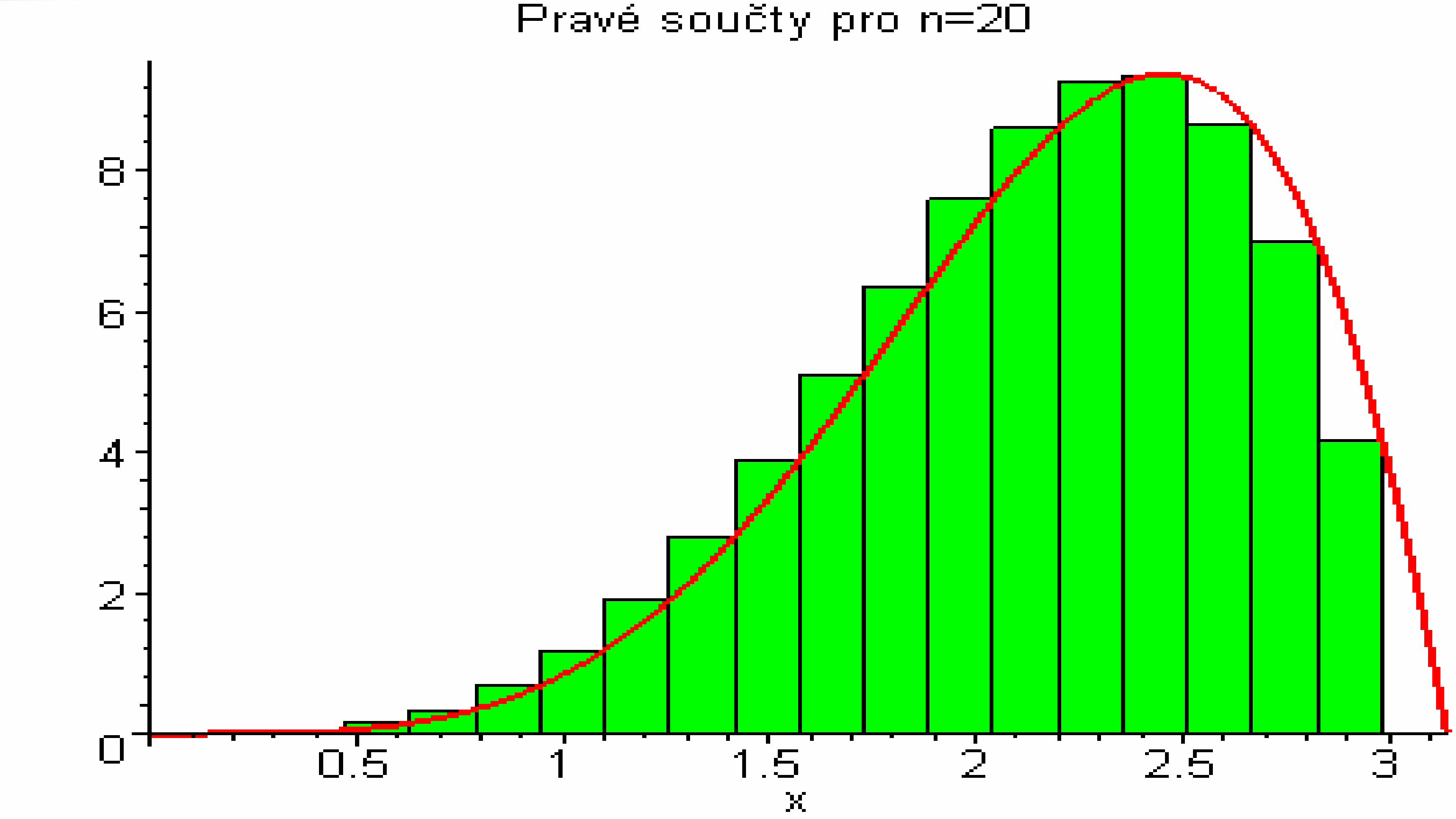
- Dělící body volme v intervalu *I* tak, aby měly vzájemně stejnou vzdálenost, tj.

$$D = \{0, \frac{\pi}{20}, \frac{2\pi}{20}, \dots, \frac{19\pi}{20}, \pi\}$$

$$Levy := \frac{1}{20}\pi\left(\sum_{i=0}^{19}\left(\frac{1}{8000}i^3\pi^3\sin\left(\frac{1}{20}i\pi\right)\right)\right)$$



$$Pravy := \frac{1}{20}\pi\left(\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{8000}i^3\pi^3\sin\left(\frac{1}{20}i\pi\right)\right)\right)$$



Zjemňování dělení

- Budeme-li k dělícím bodům přidávat stále další, budeme získávat stále přesnější odhady hledaného plošného obsahu útvaru.
- Přidávání dalších dělících bodů nazveme zjemňování dělení. Lze si představit $n \to \infty$
- U spojitých funkcí pro levé a pravé součty pak nastane situace: Levy=Pravy

Definice

- *Určitý integrál* $\mathrm{f}(x)$ od a do b označíme $I = \int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx$, je to limita pro $n \to \infty$,
- tedy $I = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{f}(x_k)\,\Delta x$
- (v definici bychom mohli použít také pravé součty, pro spojitou funkci obě limity existují a jsou si rovny).

Dokončení naší úlohy

- $\int_0^{\pi} x^3 \sin(x)\, dx \quad = \quad 12.15672076$

Georg Friedrich Bernhard Riemann

- * 17. 9. 1826 v Breselenz, Německo
- # 20. 6. 1866 v Selasca, Itálie
- V roce 1854 zobecnil Cauchyův integrál.
- „Co máme rozumět pod $\int_a^b f(x)dx$ "